



Wintersemester 2005/06
Reimund Albers



Arithmetik als Prozess

Klausur

Name: _____ Mat.Nr.: _____

Studienziel: Staatsexamen P oder SI
BA (FBW) P oder SI
bitte ankreuzen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe	Übungen
maximal	10	7	11	10	10	8	56	9,6
erreicht								

Endsumme:

Zugelassene Hilfsmittel:

2 Blatt = 4 Seiten eigene Aufzeichnungen, Taschenrechner

Bitte weisen Sie sich durch einen Lichtbildausweis und die Immatrikulationsbescheinigung aus.

WiSe

05/06

Grundsätzliches: Eine Klausur ist eine Gelegenheit, dem Prüfer zu zeigen, was Sie alles wissen. Es ist also in Ihrem Interesse, dass Ihre Ausführungen lesbar, verständlich und logisch nachvollziehbar sind. Für Studierende des Lehramts ist eine Klausur immer auch eine Prüfung für die Fähigkeit, mathematische Dinge klar und verständlich darzustellen.

1. Logik

- a. Die Transitivität der Implikation

Beweisen Sie durch eine Wahrheitstafel $((A \Rightarrow B) \text{ und } (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

*Der Stern * unter dem einen Implikationszeichen ist nur eine Markierung, die in b. gebraucht wird.*

Machen Sie deutlich, in welcher Reihenfolge Sie die Wahrheitstafel ausgefüllt haben.

- b. Wie erkennen Sie aus der Wahrheitstafel, dass die markierte Implikation (\Rightarrow_*) nicht durch eine Äquivalenz ersetzt werden kann.

- c. Bilden Sie zur Implikation $(a, b, c \in \mathbb{N}) a \mid b$ oder $a \mid c \Rightarrow a \mid b \cdot c$

die Kontraposition und formen Sie sie ggfs. so um, dass nur noch 1 „ist nicht teilbar“ vorkommt.

2. Teiler und ggT

Die Primfaktorzerlegung von $10! = 3\,628\,800$ ist $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$

- a. Bestimmen Sie eine Zahl a , $100\,000 < a < 200\,000$, die zu $10!$ teilerfremd ist, d.h. $\text{ggT}(a, 10!) = 1$. Erläutern Sie, wie Sie a gefunden haben und wieso a mit $10!$ keinen gemeinsamen Teiler größer als 1 hat.
- b. Berechnen Sie $\text{ggT}(3\,628\,800, 3\,627\,029)$ mit dem Euklidischen Algorithmus.
- c. Wie viele Teiler hat $10!$?

Information:

In der Grundschule arbeitet man zum Üben gern mit Zahlen, die ein bestimmtes Muster haben. Das Muster schreibt man mit Buchstaben und sorgt durch passende Buchstaben dafür, dass es ein einprägsames Wort ist. Berühmt sind die ANNA-Zahlen, also Zahlen, in denen die Tausender- und Einerziffer gleich sind sowie die Hunderter- und Zehnerziffer. Es gibt aber auch NANA-Zahlen, wir betrachten hier die PAPPÄ-Zahlen.

Wichtig: gleiche Buchstaben stehen für gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben müssen aber nicht unbedingt verschieden sein. So ist 55555 die PAPPÄ-Zahl mit $P = A = 5$

3. Kombinatorik

- a. Wie viele PAPPÄ-Zahlen gibt es, wenn man für das A alle Ziffern zulässt, für das P aber nicht die Null?
- b. Ein „verwirrter Pappä“ ist eine Permutation einer PAPPÄ-Zahl. Wie viele „Verwirrungen“ gibt es zum PAPPÄ 47447?
- c. Wir lassen nun für P und für A alle Ziffern, also auch die Null zu. Wenn man dann alle PAPPÄ-Zahlen mit jeder möglichen „Verwirrung“ aufschreibt, wie viele Zahlen stehen dann in dieser Liste?
- d. Jemand gibt als Lösung für c. $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$ an. Wie kann man jemandem, der praktisch keine Kenntnis von kombinatorischen Rechnungen hat, davon überzeugen, dass das Ergebnis falsch sein muss?

4. Teilbarkeitsregeln
- Entwickeln Sie mit der gewichteten Quersumme für 37 eine Teilbarkeitsregel. Testen Sie sie an der Zahl 1 874 161.
 - Bestimmen Sie alle PAPPA-Zahlen (siehe Information oben), die durch 37 teilbar sind.
5. anderes Basissystem
(Information zu den „PAPPA-Zahlen“ siehe oben)
- Die PAPPA-Zahl 13113_b ist im Zehnersystem ($b = 10$) durch $b-1 = 9$ teilbar. In welchen Basissystemen (zur Basis b) ist die Zahl 13113_b auch noch durch $b-1$ teilbar?
 - Begründen Sie: Es gibt kein Basissystem (zur Basis b), in dem die PAPPA-Zahl 13113_b durch $b+1$ teilbar ist.
 - Begründen Sie: keine PAPPA-Zahl ist in keinem Basissystem (zur Basis b) durch $b+1$ teilbar.
6. vollständige Induktion
Beweisen Sie mit vollständiger Induktion

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^n k(k+3) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+5)$